Attività con i numeri

I numeri come amici

Obiettivo principale: portare l'allievo non solo a conoscere i numeri come si intende solitamente nella scuola (contare, leggere, scrivere e operare con i numeri), ma soprattutto ad avere con essi uno stretto rapporto di amicizia.

Svolgendo i vari lavori proposti, l'allievo si convince a poco a poco che ogni numero (naturale) contiene segreti che vale la pena di scoprire.

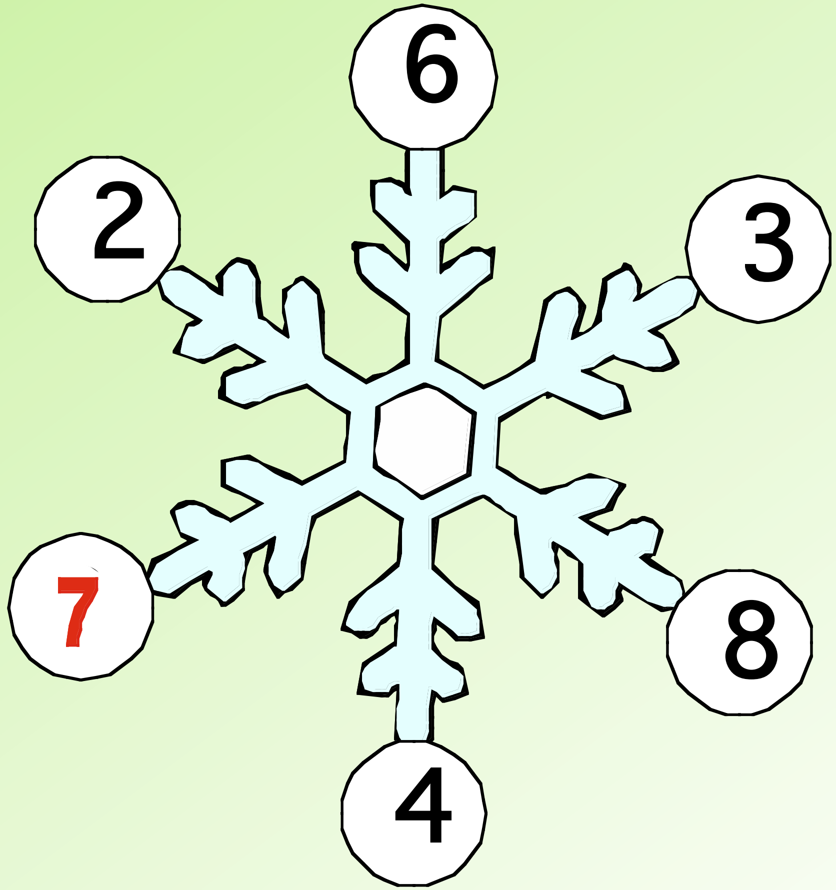
Non è esagerato affermare che la riuscita nel calcolo (non solo numerico, ma anche letterale, compresa la risoluzione di equazioni, ecc.) dipende anche dal tipo di rapporto che ogni allievo istaura con i numeri.

I numeri come amici

I fiocchi di neve

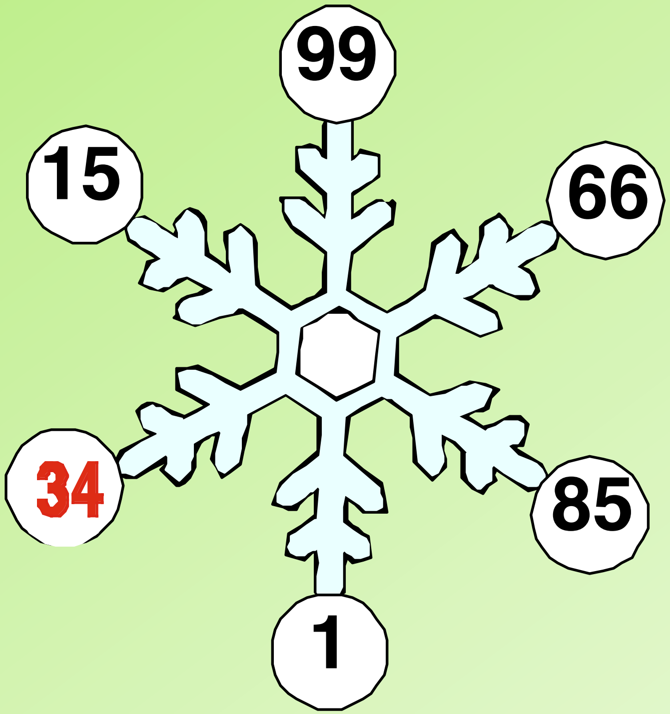
Problema 1. In ogni fiocco due numeri diametralmente opposti sono legati dalla stessa relazione matematica.

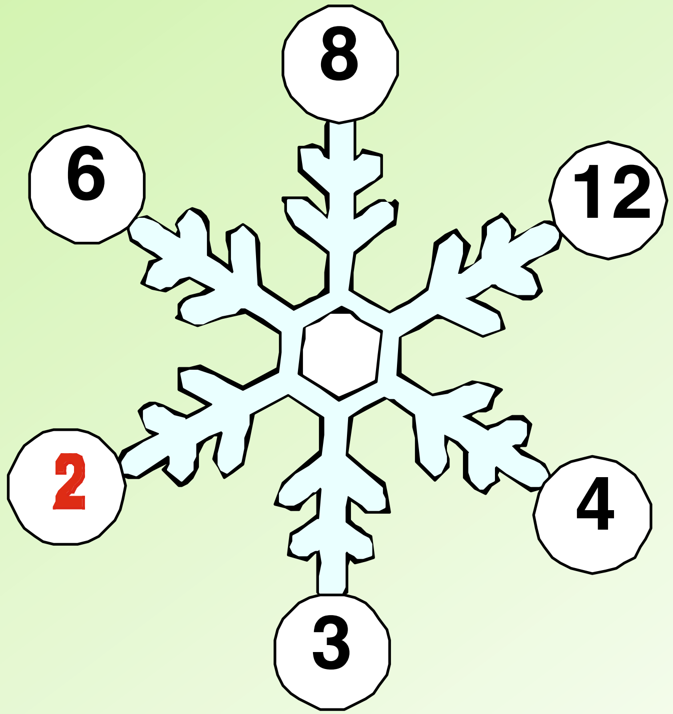
Trova il numero che si cela sotto il punto di domanda.



I numeri come amici

I fiocchi di neve

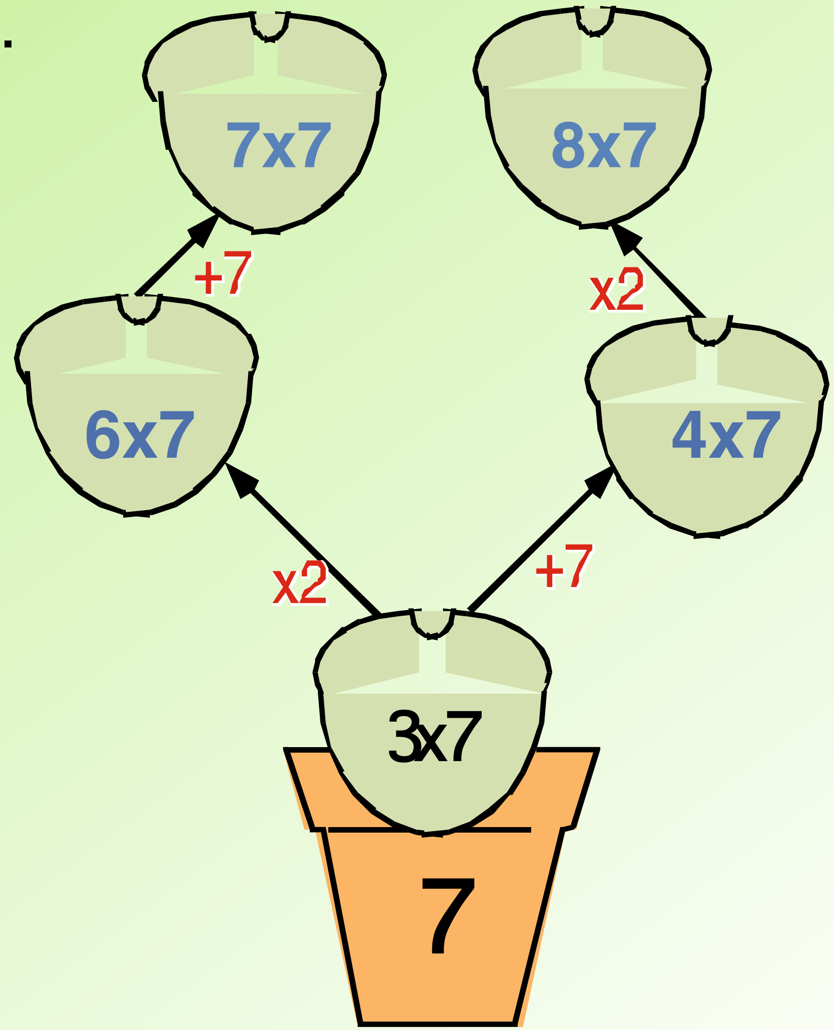




I numeri come amici

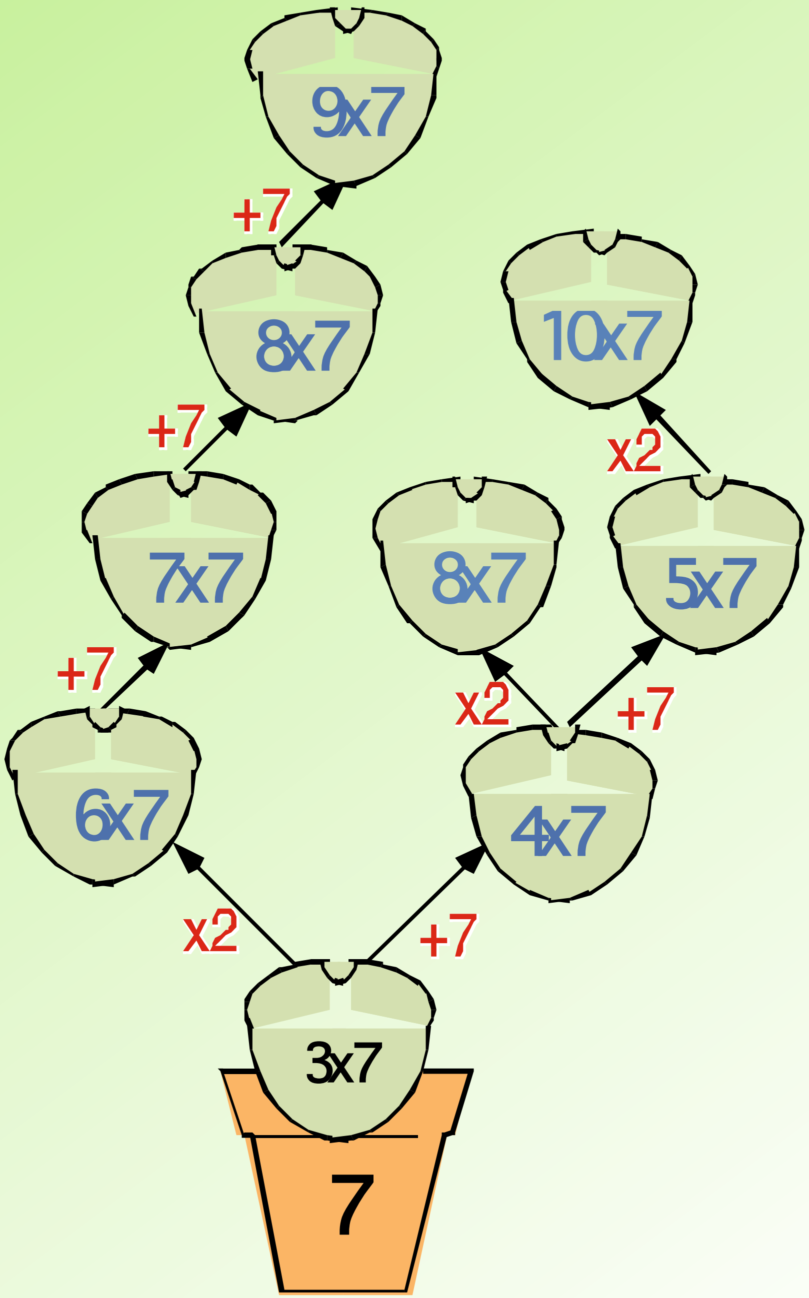
Problema 2: piante di tabelline.

Partendo da questo esempio che mostra come le tabelline possano essere organizzate ad albero, mettendoci un po' di intuizione di originalità e di gusto estetico, è possibile ottenere magnifiche piante matematiche.



I numeri come amici

Ecco un’altra pianta di tabelline:
chi disegna le piante più belle?



I numeri come amici

Problema 3: I crucinumeri.

Al posto del numero dato
e nella direzione indicata
-orizzontale o verticale-
occorre inserire una sua
scomposizione
in prodotto di
numeri naturali.

	a 8	b 3
c 25		21
d 2	49	

Orizzontali: a) 24 - d) 98

Verticali: b) 63 - c) 50

I numeri come amici

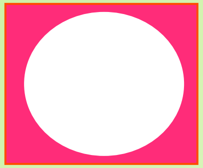
Orizzontali: a) 14 - c) 66
e) 30 - f) 21

Verticali: a) 14 - b) 210
d) 33

a 7	b 2		
c 2	3	d 11	
	e 5	3	2
f 3	7		

I numeri come amici

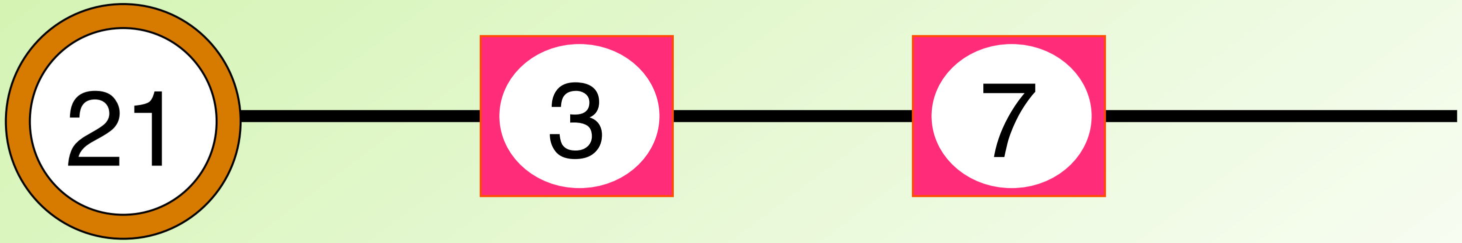
Problema 4. Gli spiedini numerici.

In ogni pezzetto di carne  inserisci un numero

in modo che il prodotto di tutti i numeri inseriti in uno stesso spiedino sia uguale al numero indicato sull'impugnatura.

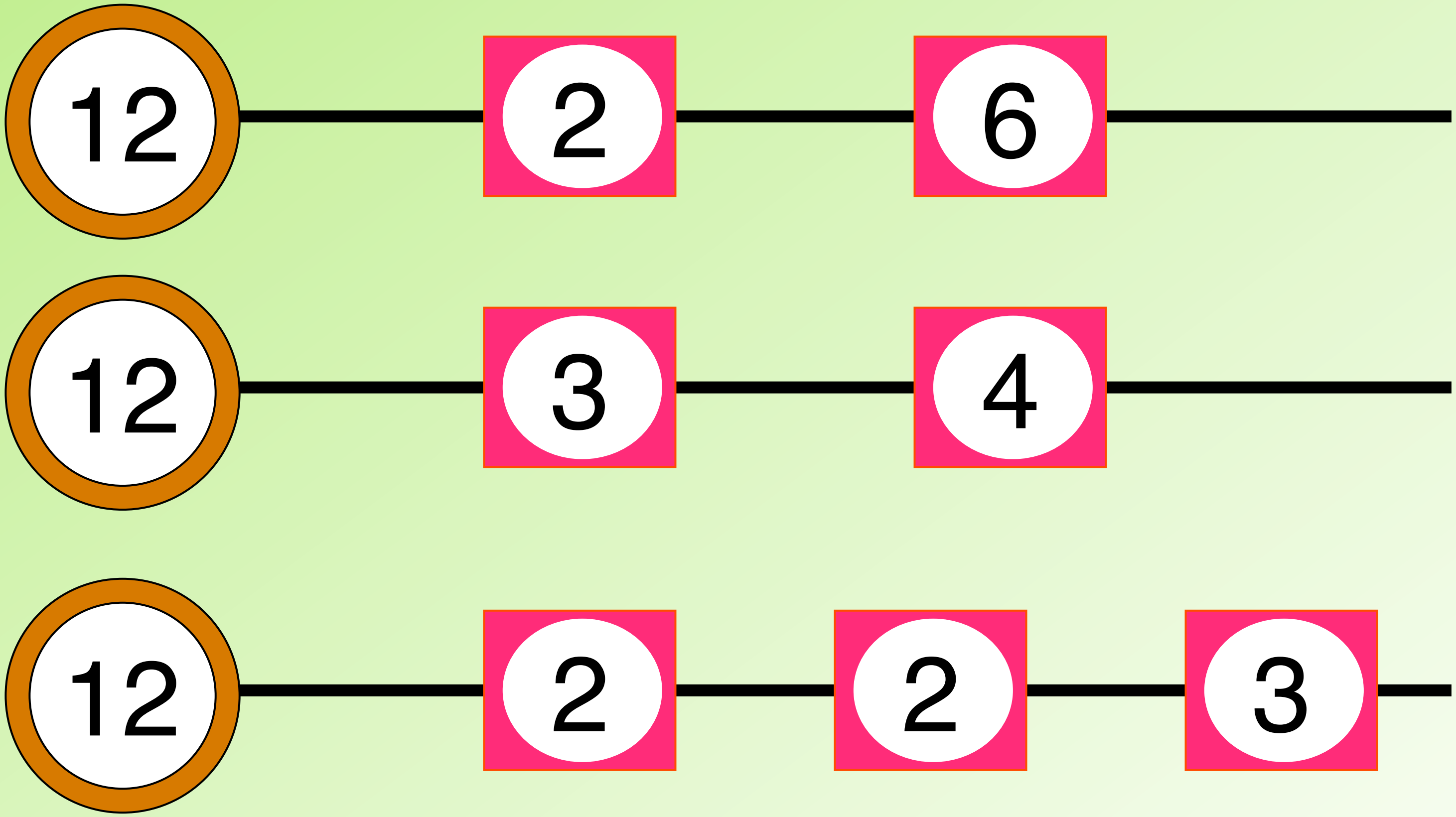
Attenzione: non si può mai mettere il numero 1, perché lo spiedino diventerebbe immangiabile!
I numeri si inseriscono dal più piccolo al più grande.

Esempio:



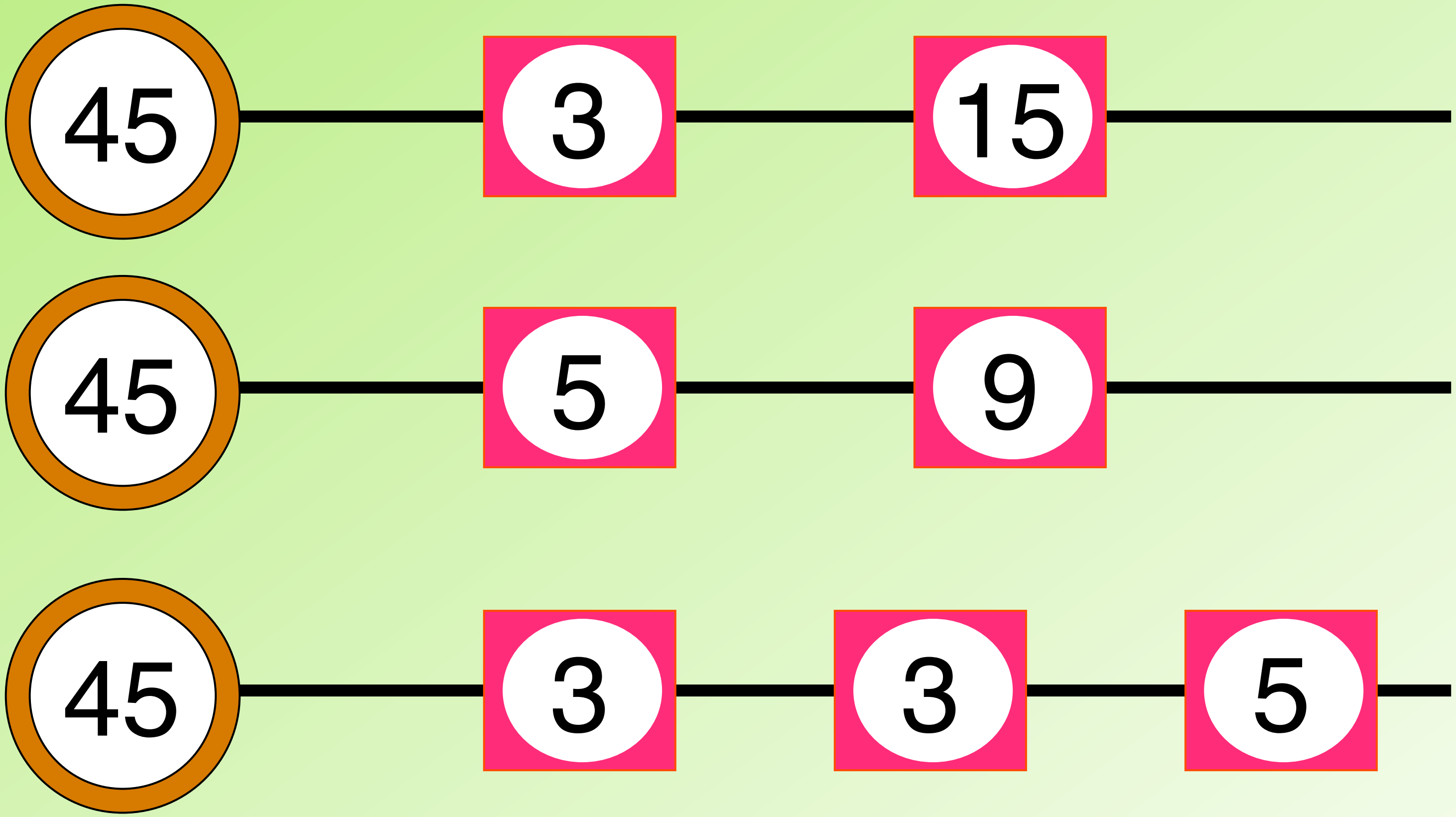
Gli spiedini numerici

A volte, con lo stesso numero dell'impugnatura, si possono confezionare più spiedini…



Gli spiedini numerici

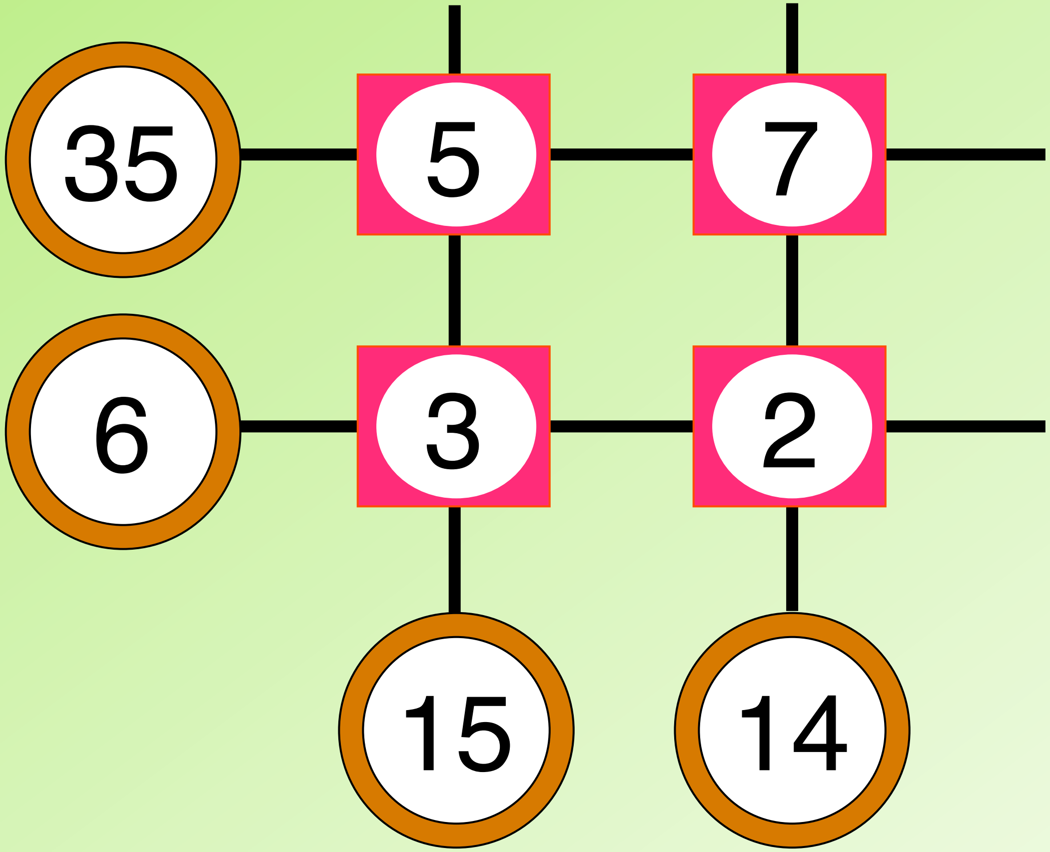
Vi sono altri numeri simili al 12…



Trovane tu altri.

Gli spiedini numerici incrociati

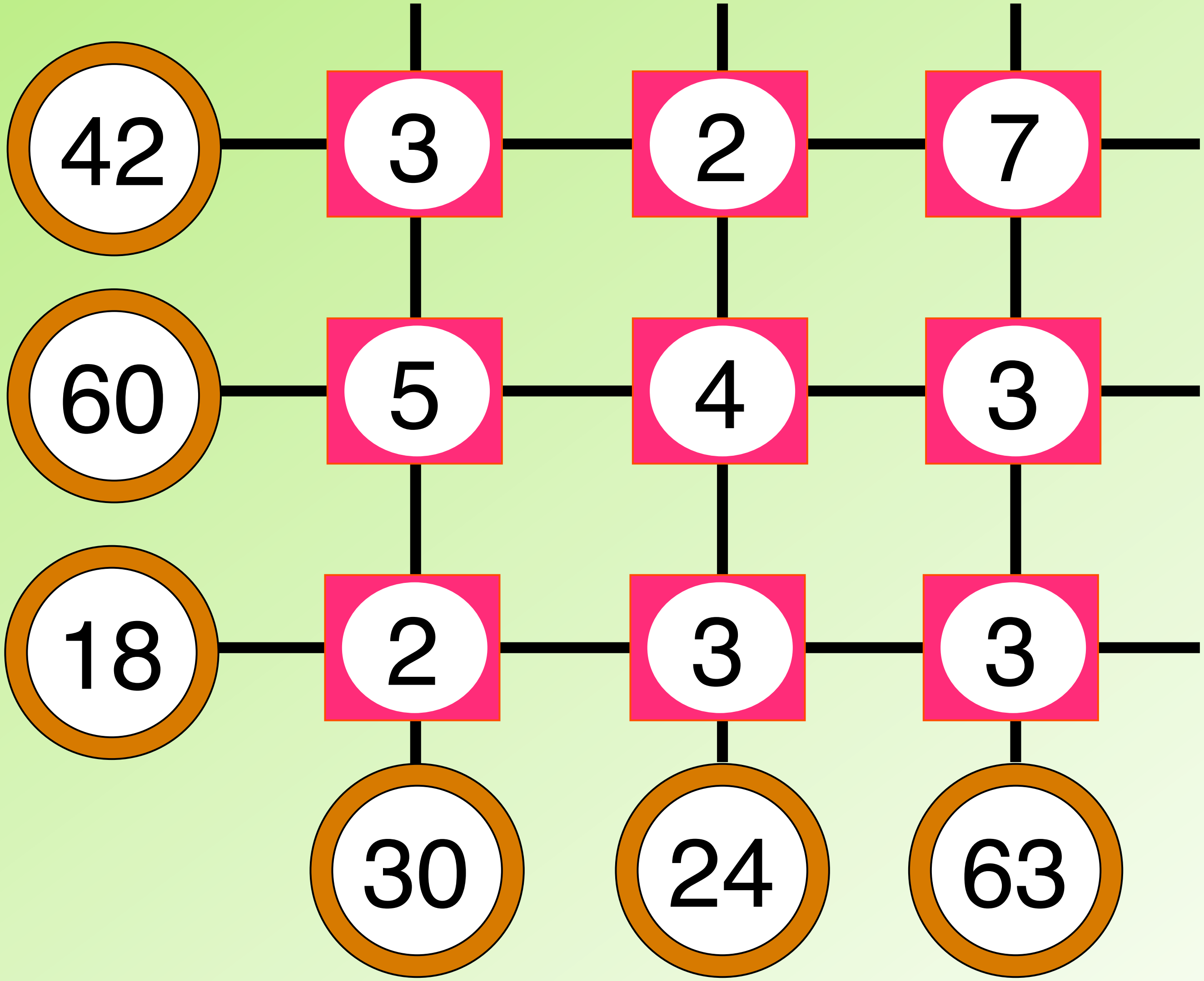
Eccoli: completali e… buon appetito! Attenti: non è sempre possibile rispettare l'ordine su ogni spiedino.



Ti piacciono? Inventane altri.

Gli spiedini numerici incrociati

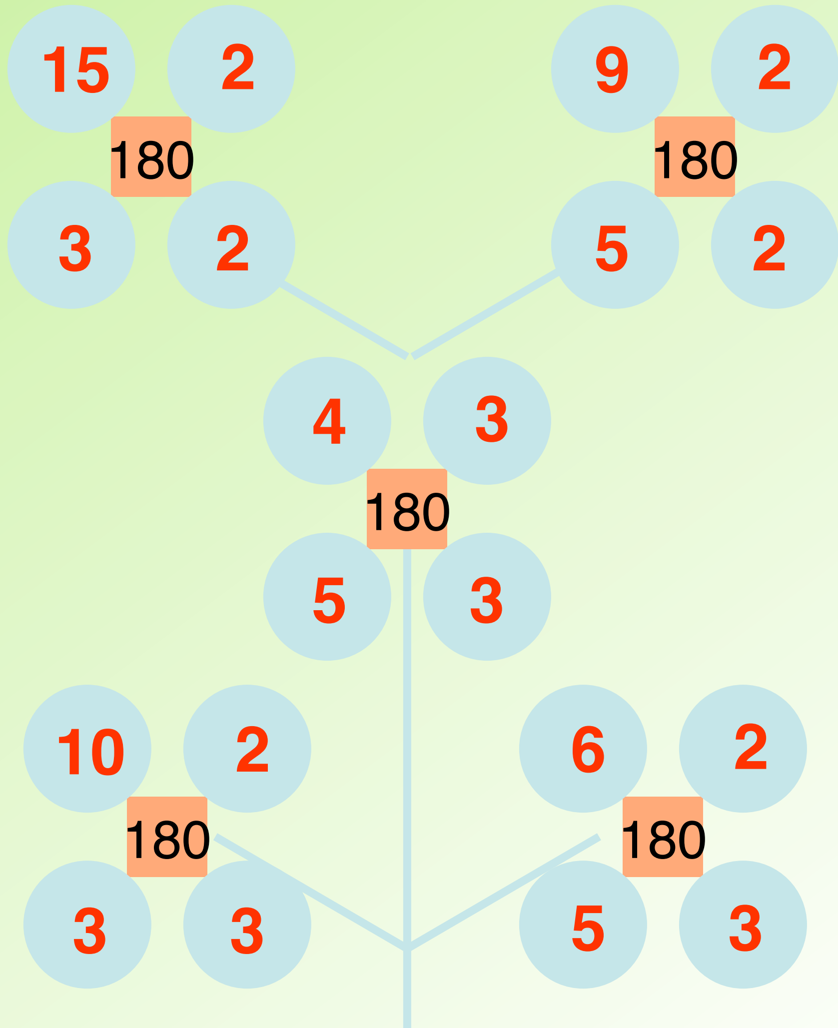
Per i buongustai:



I numeri come amici

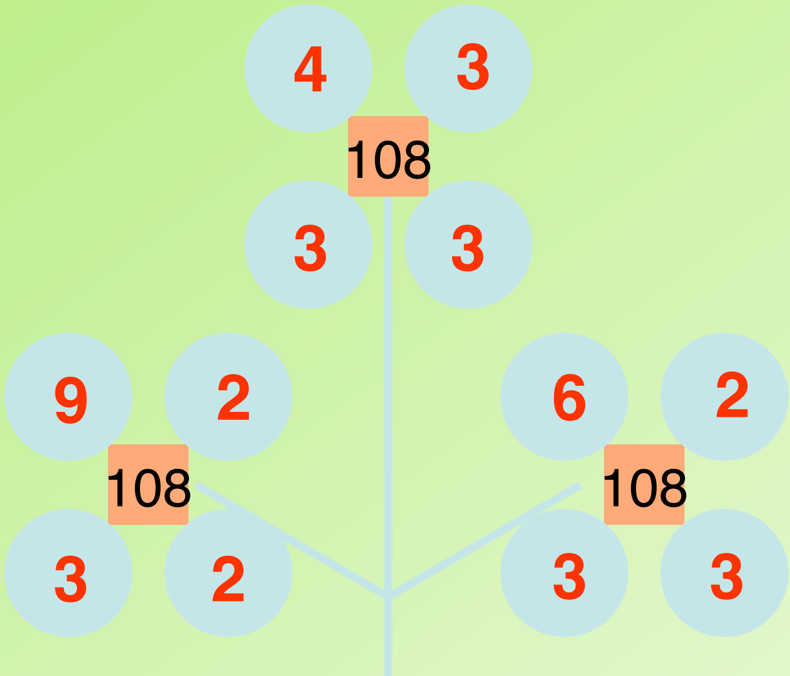
Quadrifogli numerici

Problema 5. Nelle foglioline di ogni quadrifoglio metti dei numeri naturali diversi da 1, in modo che il prodotto di tutti e quattro i numeri sia uguale al numero indicato al centro.



Quadrifogli numerici

Altro esempio:



Per il numero 108 vi sono solo 3 quadrifogli!

Quadrifogli numerici

Il numero **180** possiede **5** diverse scomposizioni.

Infatti, il prodotto di fattori primi che dà 180 è:

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

Per costruire un prodotto di 4 fattori, bisogna mettere insieme due di questi fattori.

Le possibilità per 180 sono allora…

$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ $\quad$ $6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ $\quad$ $10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

$9 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$ $\quad$ $15 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

Quadrifogli numerici

Il numero **108** possiede **3** diverse scomposizioni.

Infatti, il prodotto di fattori primi che dà 108 è:

$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

Per costruire un prodotto di 4 fattori, metto insieme due di questi fattori.

Le possibilità per 108 sono allora…

$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ $\quad$ $6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ $\quad$ $9 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

Ora puoi trovare altri numeri che si comportano come il 180 e altri come il 108. Coraggio…

I numeri come amici

Problema 6. La particolarità del numero 37.

$37 \cdot 9 = 333$ $37 \cdot 12 = 444$ $37 \cdot 15 = 555$

(…)

Con quali altri numeri il 37 dà origine a prodotti così particolari?

Basta osservare che $37 \cdot 3 = 111$ e che 111 moltiplicato per un numero di una cifra dà come risultato un numero con la scrittura decimale del tipo xxx. Dunque basta moltiplicare 37 per un qualunque multiplo di 3 minore di 30.

I numeri come amici

Problema 7. Partendo da un solo numero, preso più volte, e usando solo le quattro operazioni e l'elevazione a potenza, si possono generare altri numeri.

Per esempio:

- con tre 5 si può generare 15: $5 + 5 + 5$

- con tre 5 si può generare 6: $5 + 5 : 5$

- con tre 5 si può generare 2: $(5 + 5) : 5$

(E così via…)

Il fascino delle successioni

Certi oggetti matematici (numeri, figure, funzioni,…) acquistano un interesse particolare quando vengono messi in successione.

In questo caso l'oggetto di studio non è più il singolo elemento, ma la relazione che lega e ordina gli elementi della successione.

Distinguiamo due casi: o si conosce la legge di formazione della successione, oppure è nota solo la sua parte iniziale.

Questo secondo problema può anche avere più soluzioni.

Il fascino delle successioni

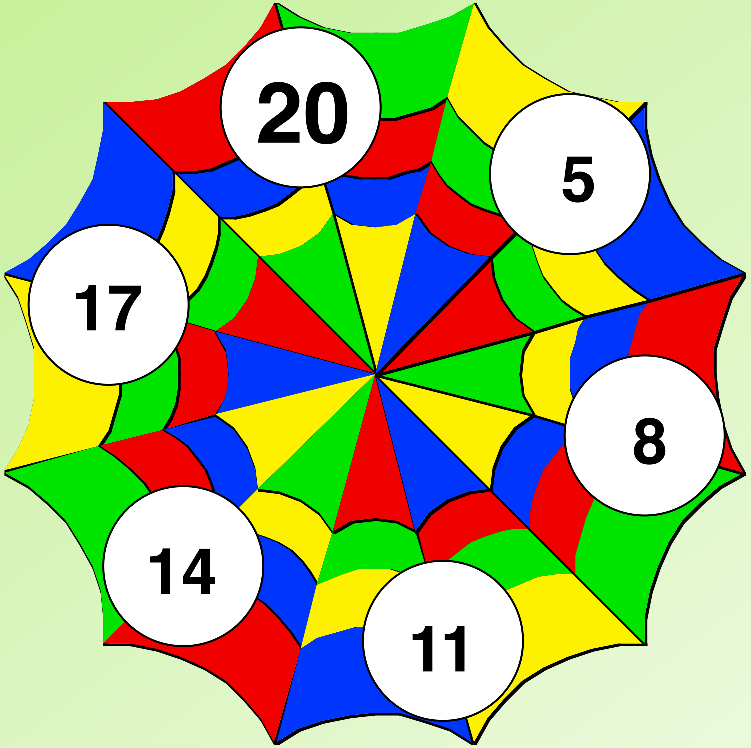
L'insegnante deve tenere conto di ciò e accettare anche soluzioni diverse da quella preventivata, purché siano completamente determinate e coerenti con il segmento iniziale dato.

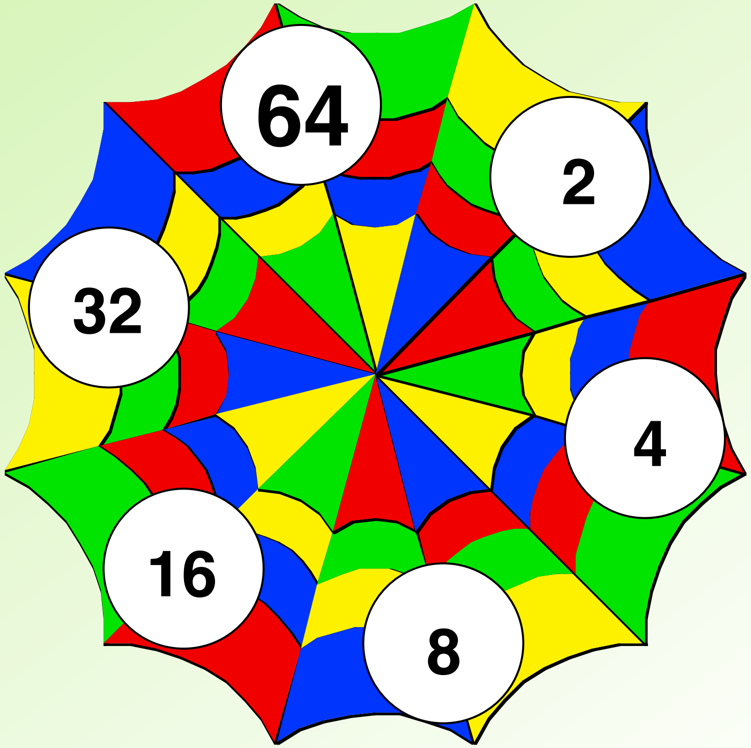
Questo tipo di attività conduce il giovane alunno ad appropriarsi di un certo numero di conoscenze che da un lato gli permettono di rendere più solida la sua formazione matematica e dall'altro di avvicinarsi ai concetti di infinitamente grande e di infinitamente piccolo: una base importante per poi, in seguito, fondare solidamente l'apprendimento dell'analisi infinitesimale.

Il fascino delle successioni

Gli ombrelloni

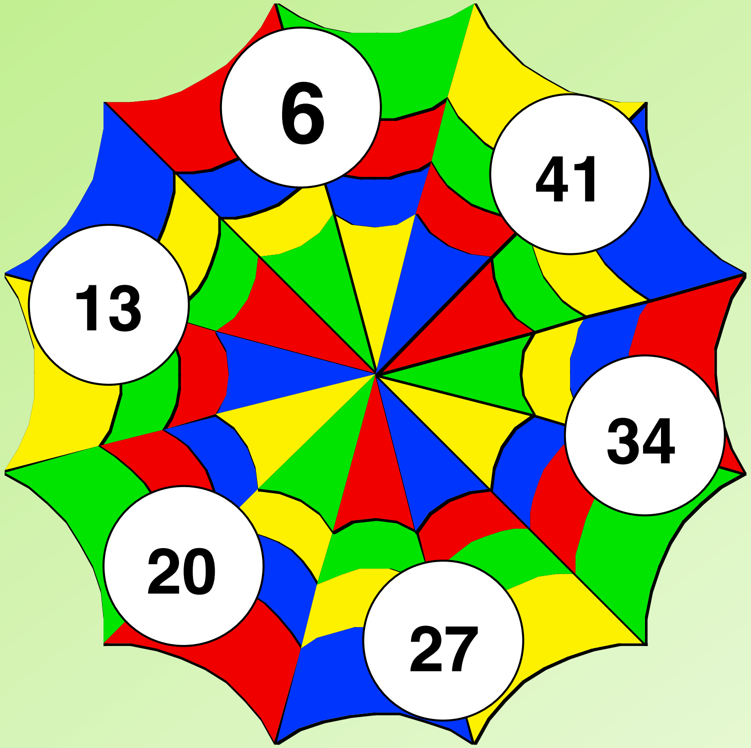
Problema 8: Trova il numero mancante

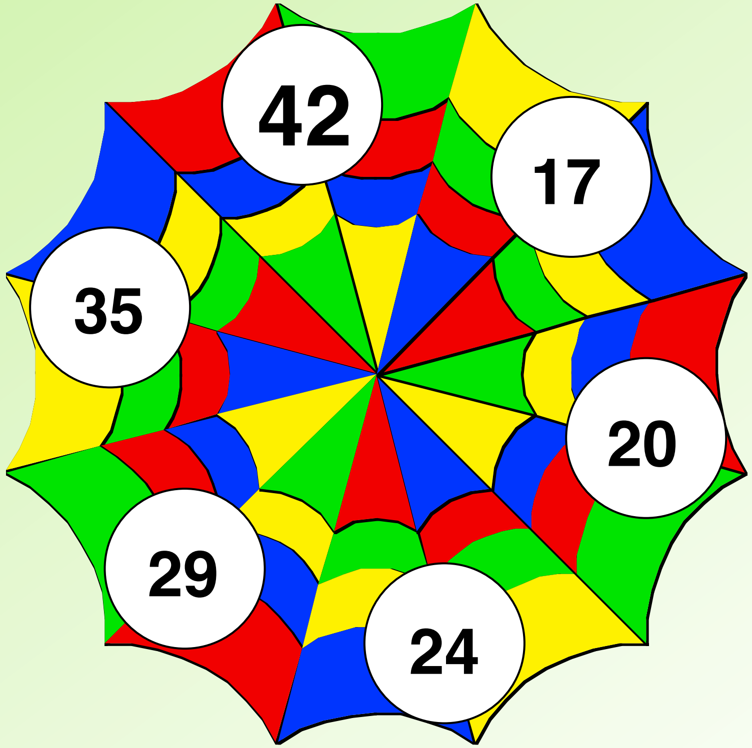




Gli ombrelloni

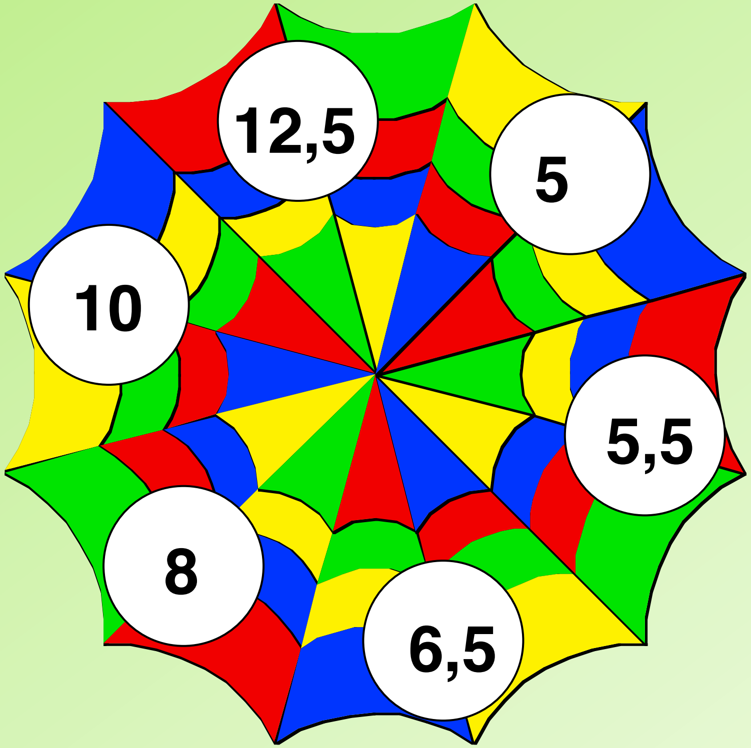
Trova il numero mancante.

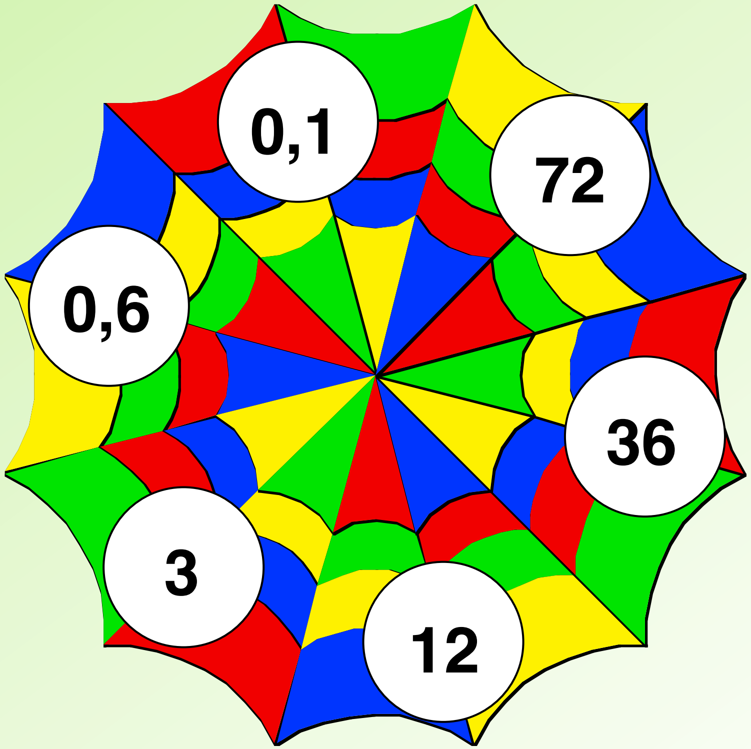




Gli ombrelloni

Trova il numero mancante.





Il fascino delle successioni

Quadrati enigmatici

Problema 9. Di ogni quadrato osserva bene le righe orizzontali o le colonne verticali e completa.

9	99	189
15	105	195
21	111	201

2160	21,6	0,216
360	3,6	0,036
60	0,6	0,006

Quadrati enigmatici

Di ogni quadrato osserva bene le righe orizzontali o le colonne verticali e completa.

25	100	10
5	20	2
1	4	0,4

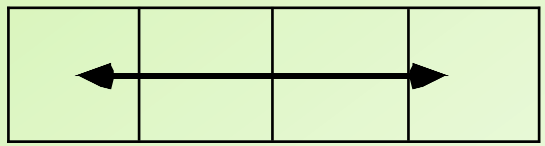
5	7	9,8
35	49	68,6
245	343	480,2

Gli agenti segreti

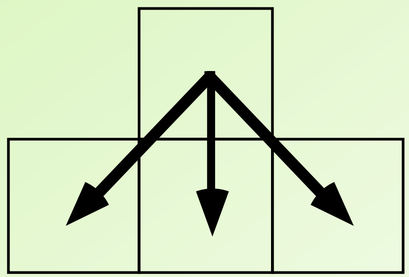
Problema 8. Gli agenti segreti per comunicare usano crittografare i loro messaggi. Inviano sempre due tabelle.

Per decifrare il messaggio si deve trovare un percorso nella prima tabella, dall'alto verso il basso, seguendo la strada dei multipli (multipli di 7 per 007, multipli di 8 per 008, e così via).

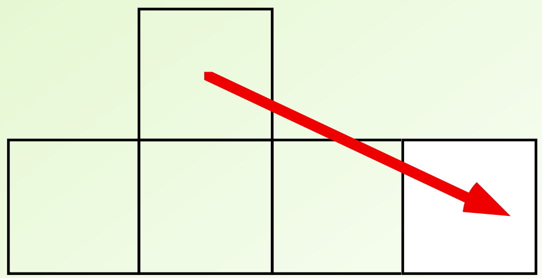
Si procede così…



Se non è possibile, così…



Ma **non** così…



Gli agenti segreti

Problema 10. Trovato il percorso fra i multipli, lo si deve ripetere esattamente nella tabella delle lettere.
Scoprirai i nomi di alcune spie pericolose.

AGENTE 0 0 7			
31	21	41	81
35	75	25	65
27	77	37	47
36	66	56	26
24	44	84	64

AGENTE 0 0 7			
O	M	A	R
A	I	L	E
N	R	D	E
N	T	I	S
M	A	O	A

Primo nome:
Mario

Gli agenti segreti

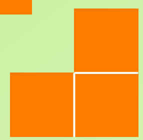
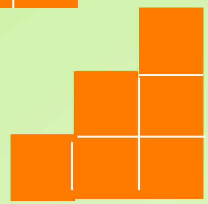
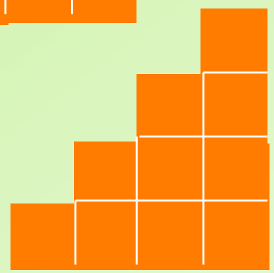
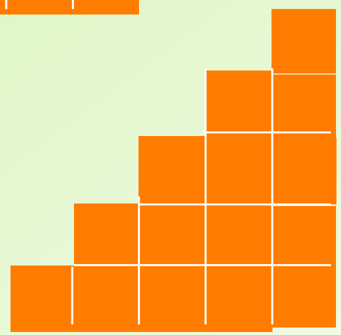
AGENTE 0 0 8			
62	22	42	32
20	30	40	50
16	28	48	68
56	36	74	34
34	24	54	14

AGENTE 0 0 8			
V	I	C	T
A	R	U	E
L	O	L	A
I	N	R	I
N	A	S	O

Secondo nome:
Tullia

Il fascino delle successioni

Problema 11. Le scale.

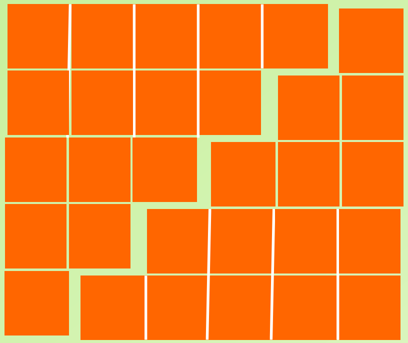
Numero gradini		**Numero elementi**
di 1 gradino:		1
di 2 gradini:		1+ 2
di 3 gradini:		1+ 2 + 3
di 4 gradini:		1+ 2 + 3 + 4
di 5 gradini:		1+ 2 + 3 + 4 + 5

Le scale

Quanti elementi ha una scala di tipo 1 con 10 gradini?

Facile: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

Osservazione importante:
due scale di 5 gradini formano un rettangolo 5x6



Quindi: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = (5 \times 6):2 = 15$

Anche: $1 + 2 + 3 + 4 = (4 \times 5):2 = 10$

Anche: $1 + 2 + 3 = (3 \times 4):2 = 6$

Quanti elementi ha una scala di tipo 1 con 100 gradini?

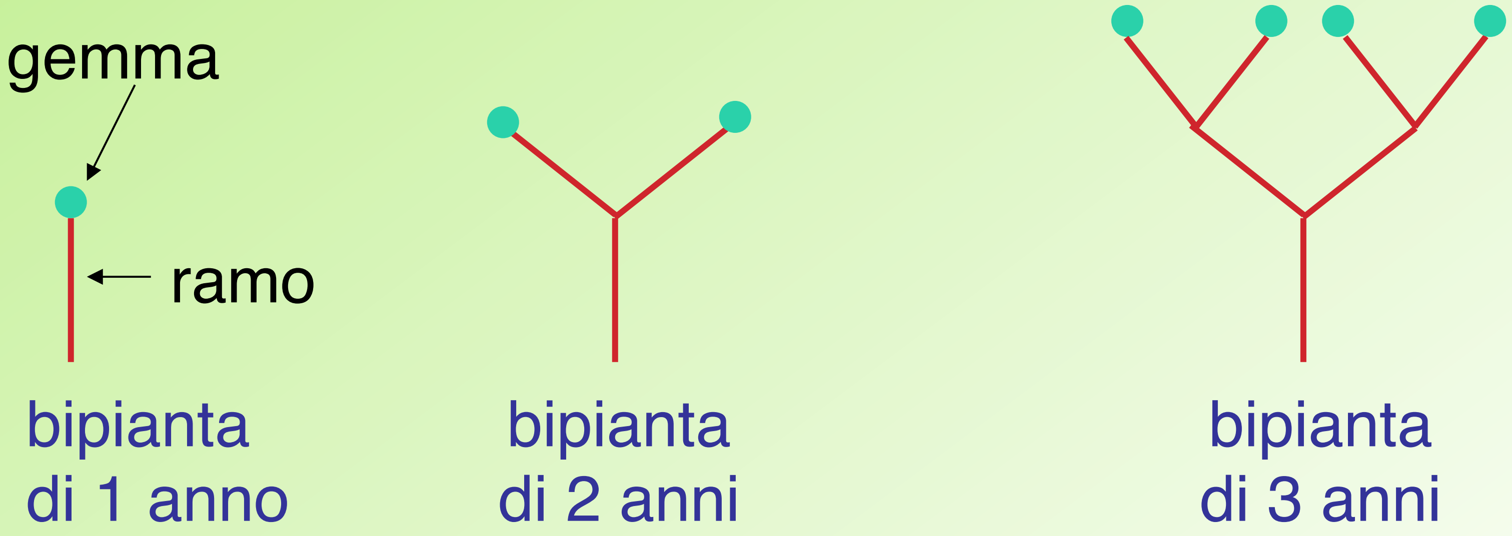
Facile: $1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = (100 \cdot 101) : 2 = 5050$

Il fascino delle successioni

Problema 12. Le piante matematiche.

Sono perfette, una caratteristica di grande effetto estetico, e intellettualmente stimolante.

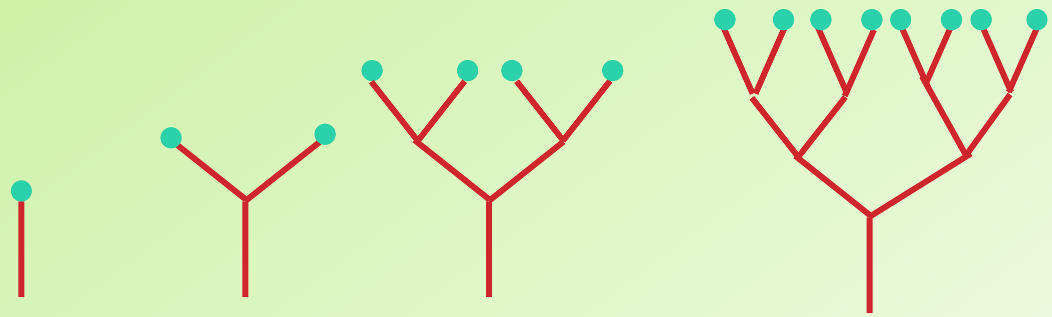
La specie più conosciuta è quella delle «bipiante»:



Quante gemme e quanti rami ha una bipianta di 4, 5, 10 anni?

Le piante matematiche

Nr. anni	1	2	3	4
Nr. gemme	1	2	4	8
Nr. rami	1	3	7	15

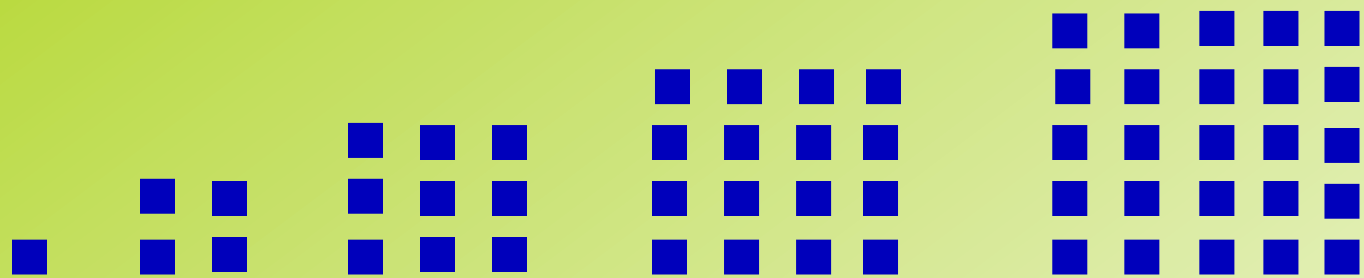


Nr. anni	5	…	10
Nr. gemme	16	…	512
Nr. rami	31	…	1023

Il fascino delle successioni

Problema 13. I numeri quadrati.

I II III IV V …



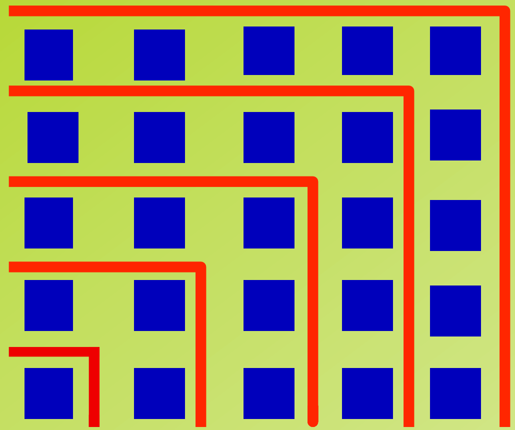
1 4 9 16 25

Qual è il sesto numero quadrato? **36 = 6 · 6**

Qual è decimo numero quadrato? **100 = 10 · 10**

Troppo facile…

I numeri quadrati



Il numero quadrato 25 può essere ottenuto addizionando i primi 5 numeri dispari…

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5 \cdot 5$

Quanto vale la somma dei primi 100 numeri dispari?

$\mathbf{1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k-1) + \ldots + 199 = 100 \cdot 100 = 10'000}$

Sono tutti? Quanti sono?

Problema 14. Quanti sono gli anagrammi della parola PROBLEMA?

Vi sono 8 posti nei quali collocare le 8 lettere, per esempio:

B	**R**	**O**	**M**	**A**	**L**	**P**	**E**

Per collocare la prima lettera (P), vi sono 8 possibilità:

R	**R**	**R**	**R**	**R**	**R**	**P**	**R**

Per ciascuna di queste 8, ve ne sono 7 per collocare la seconda lettera (R).

In totale, per collocare le prime due lettere (P,R) ci sono
8 · 7 = 56 possibilità

Sono tutti? Quanti sono?

B	R	O	M	A	L	P	E

Per inserire le prime tre lettere vi sono
$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ possibilità

Per inserire le prime quattro lettere vi sono
$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ possibilità e così via…

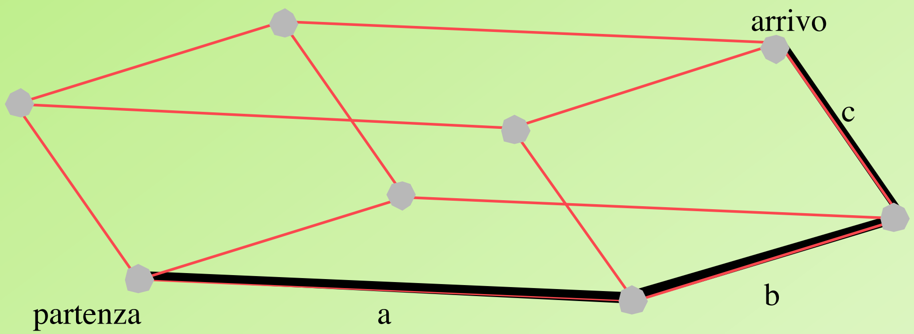
Per inserire le 8 lettere di PROBLEMA vi sono
$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$ possibilità

Questo numero si chiama **fattoriale** di 8 e si scrive:
$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Può essere interessante ottenere qualche fattoriale con la calcolatrice. (Usare il tasto «x!».)

Sono tutti? Quanti sono?

Problema 15. Percorsi minimi lungo gli spigoli di un parallelepipedo scheletrato. Quanti ne esistono?

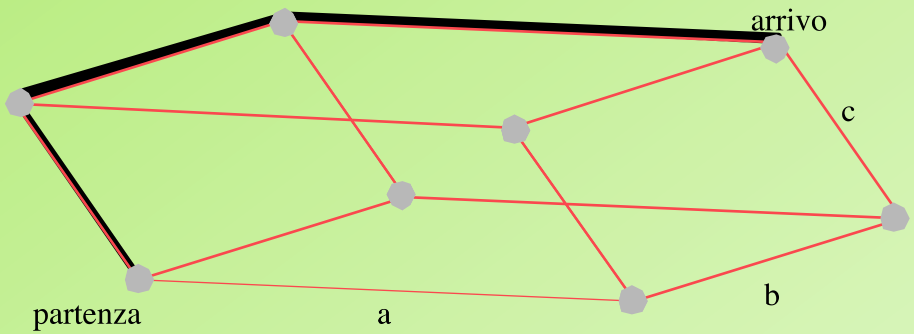


Occorre “vedere” che ogni percorso minimo si compone di tre tratti, uno per ciascuna direzione degli spigoli.

Il percorso evidenziato nella figura precedente può essere codificato con la parola “abc”.

Tutti i percorsi minimi (e solo quelli) corrispondono agli anagrammi di questa parola.

Sono tutti? Quanti sono?



Esistono perciò
$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ percorsi minimi.

Essendo pochi, si possono anche elencare. Per esempio:

abc , acb , bac , bca , cab , cba

Perché non ne esistono altri?

Sono tutti? Quanti sono?

Problema 16. Quanti sono gli anagrammi della parola TATTO?

La novità è la presenza di **tre lettere uguali** (T).

Sappiamo che se tutte le lettere fossero diverse si avrebbero
$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ anagrammi

Potremmo scrivere le lettere T con colori diversi.

TATTO , TATTO , TATTO , TATTO , TATTO , TATTO

Osserviamo che per ogni anagramma della parola TATTO ne esistono altre 5 identiche.

Sono tutti? Quanti sono?

Quindi: i 120 anagrammi della parola TATTO (distinguendo le lettere T per il colore) si possono suddividere in gruppi di 6 parole fra loro identiche (se non si distinguono i colori).

Si hanno allora:
120 : 6 = 20 anagrammi della parola TATTO

Eccoli tutti, per curiosità:

AOTTT ATOTT ATTOT ATTTO OATTT
OTATT OTTAT OTTTA TAOTT
TATOT TATTO TOATT TOTAT TOTTA TTAOT
TTATO TTOAT TTOTA TTTAO TTTOA

Sono tutti? Quanti sono?

Problema 17. Quanti sono gli anagrammi della parola MAMMA?

La presenza delle 3 M ci suggerisce che gli anagrammi potrebbero essere
120 : 6 = 20   (esattamente come per TATTO)

Ma sono doppie anche le A; quindi, per esempio, fra le 20 troviamo anche
MAMMA e   MAMMA
che viste senza distinguere i colori sono un solo anagramma.

Dunque gli anagrammi di MAMMA sono
20 : 2 = 10

AMMMA , MAMMA , MMAMA , MMMAA , MMAAM
AMMAM , AMAMM , AAMMM , MAAMM , MAMAM

Sono tutti? Quanti sono?

La parola MAMMA ha 5 lettere: 3 M e 2 A

I suoi anagrammi sono:
$(120 : 6) : 2 = 10$

La parola TRALLALLA ha 9 lettere, delle quali 3 A e 4 L.

Con 9 lettere si avrebbero:
$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362'880$ anagrammi

Tenendo conto delle lettere che si ripetono, la parola TRALLALLA ha allora:

$(362'880 : 6) : 24 = 2520$ anagrammi

Abbiamo calcolato il loro numero. Scriverli tutti sarebbe umanamente impossibile…

Sono tutti? Quanti sono?

Problema 18. In quanti modi si possono scegliere 3 colori da un insieme di 5?

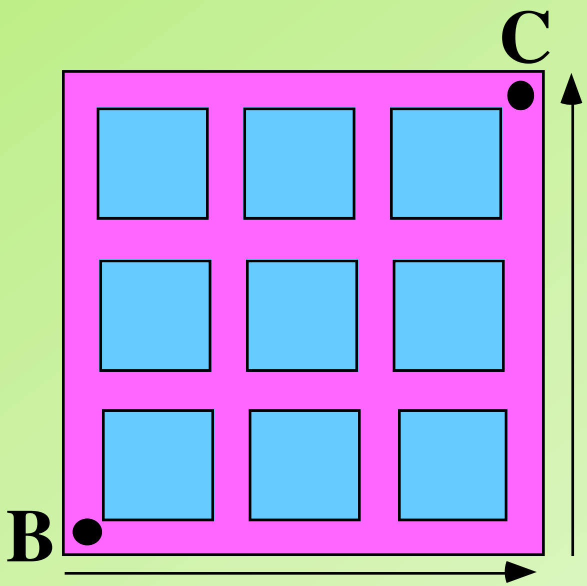
Ogni scelta è equivalente a una parola di 5 lettere:
3 S (scelto) e 2 N (non scelto). Per esempio, la scelta…

… corrisponde alla parola SNNSS.

Ci sono tante scelte possibili quanti sono gli anagrammi della parola SNNSS, quindi:
(120 : 6) : 2 = 10 modi

Sono tutti? Quanti sono?

Problema 19. Percorsi automobilistici in città.



Per andare da B a C ci si può muovere soltanto lungo le strade rosa, percorribili a senso unico indicato dalle frecce. Quanti diversi percorsi conducono da B a C?

Ogni percorso può essere rappresentato da una parola di 6 lettere: 3 D e 3 A. (Per esempio: DDDAAA)

Vi sono perciò (720 : 6) : 6 = 20 percorsi

Continua…

gianfranco.arrigo@span.ch